Provas resolvidas da UFRGS 2005

Matemática

01. Resposta (B)

I) **F**

$$\left(3^2\right)^{1000} < \left(2^3\right)^{1000}$$

$$9^{1000} < 8^{1000}$$

II) **V**

$$-\frac{1}{3} < \frac{1}{9}$$

III) **F**

$$\frac{2}{3} < \frac{4}{9}$$

$$0,666\ldots < 0,444\ldots$$

02. Resposta (D)

$$\frac{2000}{2^{10}.2^{10}.2^{10}} = \frac{2.10^3}{2^{30}} = 2^{1-30}.(2.5)^3 = 2^{-29}.2^3.5^3 = 5^3.2^{-26}$$

03. Resposta (E)

$$3+2\sqrt{2} = \sqrt{x}$$

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2$$ 3|

$$9+12\sqrt{2}+8 = x$$

$$x = 17+12\sqrt{2}$$

04. Resposta (C)

Considerando E como o PIB da Europa e A como o PIB da América Latina

$$0,05.E = 0,13.A$$

$$E = \frac{0,13.A}{0,05} = \frac{13}{5}A = 2,6A$$

Logo, o PIB da Europa deveria superar o da América Latina em 160%.

05. Resposta (B)

Ao determinar o poder de compra de 100 reais em 2004, obtemos

$$270 \rightarrow 100\%$$

$$100 \rightarrow x$$

$$x = \frac{100.100\%}{270} \cong 37\%$$

Logo, a perda do poder de compra foi de aproximadamente 63%.

06. Resposta (D)

Convertendo o número complexo $z=\sqrt{3}+i$ para a forma trigonométrica, encontramos $z=2\left(\cos 30^\circ + i.\text{sen}\,30^\circ\right)$. Considerando a fórmula de Moivre para potência de números complexos na forma trigonométrica, $z^n = |z|^n.\left(\cos n\theta + i.\text{sen}\,n\theta\right)$, temos que o argumento de z^4 é igual a 4.30° = 120°. Logo, o ângulo formado entre as representações geométricas é igual a $90^\circ = \frac{\pi}{2}$.

07. Resposta (D)

$$\alpha = \frac{14.360^\circ}{30} = 168^\circ$$

08. Resposta (E)

A função *f*(*x*) é definida por

$$f(x) = 7.5 - 2.\frac{x^2}{2} - 2.\frac{(7-x)(5-x)}{2}$$

$$f(x) = 35 - x^2 - 35 + 12x - x^2$$

$$f(x) = -2x^2 + 12x$$

As raízes da função são *x* = 0 e *x* = 6, logo $x_V = 3$. Substituindo na função *f*(*x*), obtemos $y_V = -2.3^2 + 12.3 = -18 + 36 = 18$. Considerando que a função tem por domínio o intervalo aberto (0,5), concluímos que 0 não pertence à imagem da função, representada pelo intervalo (0,18].

09. Resposta (E)

Extremidades do gráfico na mesma posição relativa ao eixo x → grau par

Gráfico intercepta o eixo dos y no ponto y = 0 → termo independente nulo

10. Resposta (A)

$$P = x + x + 2x + 2x$$
$$P = 6x$$
$$x = \frac{P}{6}$$

.

Como a área do retângulo é representada pelo produto $A = x.(2x) = 2x^2$, temo

$$A = 2\left(\frac{P}{6}\right)^2 = 2.\frac{P^2}{36} = \frac{P^2}{18}$$

11. Resposta (A)

A única opção em que os números estão em P.A. e o teorema de Pitágoras se verifica é a referente ao triângulo I.

12. Resposta (C)

No primeiro mês de capitalização, considerando *S* como o saldo devedor, teremos

$$S = x.(1,1).(0,8) = x.(0,88)$$

Considerando 12 meses, teremos $S = x.(0,88)^{12}$

13. Resposta (C)

Considerando que $\operatorname{sen} m = 0$ para $m = k\pi,\ k \in ¢$, temos

$$\frac{\pi}{2}.\log x = k\pi$$
$$\frac{1}{2}.\log x = k$$
$$\log x = 2k$$
$$10^{2k} = x$$

Como *k* é um número inteiro, 2*k* é um número par, o que nos leva ao conjunto solução $S = \{\ldots, 10^{-6}, 10^{-4}, 10^{-2}, 1, 10^2, 10^4, 10^6, \ldots\}$.

14. Resposta (E)

$$\log_b a^2 = x \rightarrow b^x = a^2$$
$$\log_{b^2} a = y \rightarrow \left(b^2\right)^y = a \rightarrow b^{2y} = a \rightarrow \left(b^{2y}\right)^2 = a^2 \rightarrow b^{4y} = a^2$$

Igualando as expressões de a^2, obtemos

$$b^x = b^{4y}$$
$$x = 4y$$

15. Resposta (B)

Soma dos coeficientes = $P(1) = \left(1^2 + 3.1 - 3\right)^{50} = 1^{50} = 1$

16. Resposta (D)

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + 4x^3 + px^2 + qx + r & x^3 + 3x^2 + 9x + 3 \\ \cline{2-2}
-x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 3x & x + 1 \\ \cline{1-1}
x^3 + (p-9)x^2 + (q-3)x + r & \\
-x^3 - 3x^2 \quad -9x \quad -3 & \\ \cline{1-1}
(p-12)x^2 + (q-12)x + r - 3 &
\end{array}$$

Como a divisão é exata, o resto vale zero, o que nos leva a $p - 12 = 0 \rightarrow p = 12$

17. Resposta (C)

$$2\cos x = \operatorname{sen} x \rightarrow 2 = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \rightarrow \tan x = 2,\ \text{para } \cos x \neq 0$$

No intervalo $[0,\pi]$, $\tan x = 2$ tem uma única solução entre $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$. Como a função tangente tem período igual a π, no intervalo de $[0,5\pi]$ o número de soluções é igual a 5. Como $\frac{16\pi}{3} - 5\pi = \frac{\pi}{3}$, não há nenhuma solução adicional, e o número de soluções na porção não-negativa do intervalo dado é igual a 5. O mesmo raciocínio pode ser replicado com relação à porção não-positiva do intervalo de referência, o que resulta em um total de 10 soluções.

18. Resposta (A)

Área de cada quadrado = $6^2 = 36$

$$S_{ADP} = \frac{6.6.\operatorname{sen}30^\circ}{2} = 9$$

$$S_{ABR} = \frac{6.6.\operatorname{sen}150^\circ}{2} = 9$$

Logo a superfície do hexágono é igual a 36 + 36 + 9 + 9 = 90.

19. Resposta (B)

A partir do teorema de Pitágoras, $3^2 + 4^2 = R^2 \rightarrow R = 5$

$$S_{\text{sombreada}} = S_{\text{setor } 90^\circ} - S_{\text{retângulo}}$$

$$S_{\text{sombreada}} = \frac{\pi.5^2}{4} - 3.4 \cong \frac{3,14.25}{4} - 12 \cong 7,6$$

20. Resposta (B)

Cada um dos triângulos correspondentes às pontas da estrela é isósceles, e os ângulos da base equivalem aos ângulos externos do pentágono regular central.

$$\hat{a}_e = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180°, temos que cada um dos ângulos *a*, *b*, *c*, *d* e *e* mede 1. Logo, a soma dos ângulos *a*, *b*, *c*, *d* e *e* é igual a 180°.

21. Resposta (E)

O trapézio tem bases paralelas $\overline{AD} = \sqrt{2}$ e $\overline{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. A altura do trapézio pode ser determinada pelo triângulo retângulo cujos vértices são os ponto médios das bases do trapézio e o centro da base inferior do cubo, resultando em

$$h^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \rightarrow h = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$S_{\text{trapézio}} = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right).\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)}{2} = \frac{9}{8}$$

22. Resposta (C)

Percebe-se, com base na reconstrução do cubo, que os número 1 e 4 ocupam faces opostas. Logo, os valores 2, 3, 5 e 6 serão adjacentes à face de número 1, o que resulta no produto 2.3.5.6 = 180.

23. Resposta (E)

A referida "interseção de um plano que passa por seu vértice e pelo centro de sua base" representa a secção meridiana do cone. A partir da informação de que se trata de um triângulo retângulo de catetos iguais (isósceles), considerando que a geratriz mede *x*, teremos o diâmetro da base medindo $x\sqrt{2}$ e o raio da base medindo $\frac{x\sqrt{2}}{2}$. Ao planificarmos a superfície lateral do cone, obteremos um setor circular cujo raio coincidirá com a geratriz *x* e cujo arco terá comprimento equivalente à medida da circunferência da base do cone, ou seja,

$$C = 2\pi\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right) = \pi x\sqrt{2}$$

A partir daí, vem

$$2\pi x \to 360°$$
$$\pi x\sqrt{2} \to \alpha$$
$$\alpha = \frac{\pi x\sqrt{2}.360°}{2\pi x} = 180°.\sqrt{2} \cong 180°.1,4 \cong 252°$$

24. Resposta (C)

Como o vértice *A* do triângulo *ABC* está sobre a reta vertical $x = \frac{1}{3}$, sua projeção perpendicular em relação ao eixo *x* é a altura do triângulo e divide a base *BC*, que inicialmente mede 2, em dois segmentos de medidas iguais a 4/3 e 2/3. Considerando a altura *h* comum aos dois triângulos retângulos originados,

$$\tan\alpha = \frac{h}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{2}h$$

$$\tan\beta = \frac{h}{\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{3}{4}h$$

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{\left(\frac{3}{2}h\right)}{\left(\frac{3}{4}h\right)} = 2$$

25. Resposta (D)

Considerando a situação de dupla tangência aos eixos coordenados e a circunferência situada no primeiro quadrante, conclui-se que a medida do raio e as coordenadas do centro da circunferência têm o mesmo valor.

$(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$

Pela condição de pertinência do ponto, que pode tanto ter coordenadas (2,9) quanto (9,2), vem que

$(2 - a)^2 + (9 - a)^2 = a^2 \to -22a + 85 = 0$

A soma das raízes, portanto, vale

$$-\frac{(-22)}{1} = 22.$$

26. Resposta (D)

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + 2y = 10 \\ 3x + 2y + z = 18 \end{cases} \to S = \{3, 2, 5\}$$

Logo, a equipe vencedora foi a equipe I, com um total de 22 pontos.

27. Resposta (A)

			x
			y
			z
-2	1	0	$-2x+y=-1$
-1	0	1	$-x+z=0$
1	0	-1	$x-z=0$

A partir daí, conclui-se que
y = 2x - 1 e x = z. Portanto,
(x, 2x, - 1, x) representa a forma das ternas procuradas.

28. Resposta (A)

Total de possibilidades de acendimento de 5 lâmpadas = $C_7^5 = C_7^2 = \dfrac{7.6}{2.1} = 21$
Total de possibilidades de acendimento de 4 lâmpadas = $C_7^4 = C_7^3 = \dfrac{7.6.5}{3.2.1} = 35$.
Probabilidade de que apareça no painel exatamente o número 24 =
$\dfrac{1}{21}.\dfrac{1}{35} = \dfrac{1}{735}$

29. Resposta (B)

Os números de 3 algarismos menores que 500 são em número de 400 (vão do 100 até o 499). As potências naturais de 2 pertencentes ao intervalo são $2^7 = 128$ e $2^8 = 256$. Portanto, a probabilidade de $\log_2 N$ ser um número natural é igual a $\dfrac{2}{400} = 0{,}005$

30. Resposta (A)

$$\frac{8}{14}.\frac{7}{13}.\frac{6}{12} = \frac{2}{13} \cong 0{,}153 \cong 15{,}3\%$$