

VESTIBULAR UFRGS 2020

RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA

Questão 26

I – Se $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, então $\left(\frac{a}{b}\right)^2 < \left(\frac{c}{d}\right)^2$

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$	<i>Fazendo</i> $\frac{a.c}{b.d} = x$
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} < \frac{c}{d} \cdot \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$	$x < \left(\frac{c}{d}\right)^2$
$\frac{a.c}{b.d} < \left(\frac{c}{d}\right)^2$	$\left(\frac{a}{b}\right)^2 < \frac{a.c}{b.d}$	$x > \left(\frac{a}{b}\right)^2$

Então $\left(\frac{a}{b}\right)^2 < \left(\frac{c}{d}\right)^2$ (V)

II – Se $\frac{a}{b} < 0$, então $\frac{c}{d} + \frac{a}{b} > 0$

$\frac{c}{d} + \frac{a}{b} > 0$, se $\left|\frac{c}{d}\right| > \left|\frac{a}{b}\right|$

$\frac{c}{d} + \frac{a}{b} < 0$, se $\left|\frac{c}{d}\right| < \left|\frac{a}{b}\right|$

Logo, a afirmativa é (F)

Por atribuição:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} = -\frac{4}{3} \quad \frac{a}{b} < 0 \\ \frac{c}{d} = \frac{1}{3} \quad \frac{c}{d} > 0 \end{array} \right\} \frac{c}{d} + \frac{a}{b} = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{3}{3} = -1 \quad -1 < 0 \quad (F)$$

III – $\frac{a}{b}$ onde a é par e b é par:

$a = 2x \quad x < a$

$b = 2y \quad y < b$

$\frac{a}{b} = \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}$ $\frac{a}{b}$ foi reduzida a $\frac{x}{y}$ (F)

Por atribuição:

$$\begin{aligned} a &= 8 & \frac{8}{10} &= \frac{2.4}{2.5} = \frac{4}{5} \\ b &= 10 \end{aligned} \quad (F)$$

27)

$$\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{100}\right)}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{98}{99} \cdot \frac{99}{100}} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10} \quad (A)$$

28)

Resolução 1

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x = \frac{2 + 6}{2} \quad x_1 = \frac{8}{2} = 4 \quad x_2 = -\frac{4}{2} = -2$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{-2}\right)^2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \quad (C)$$

Resolução 2

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

raízes a e b

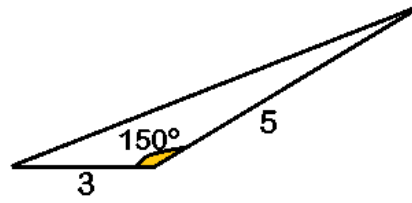
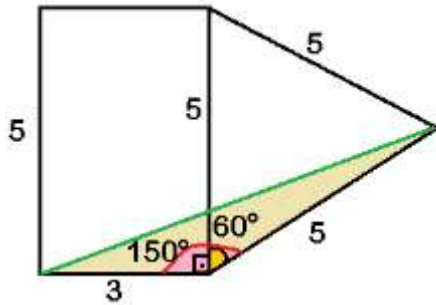
A soma dos inversos das raízes é dada por

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab} = \frac{S}{P} \quad S = -\frac{b}{a} \quad P = \frac{c}{a}$$

$$\frac{S}{P} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \quad (C)$$

29)



Utilizando a Lei dos Cossenos:

$$x^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos(150^\circ)$$

$$x^2 = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot -\cos(30^\circ)$$

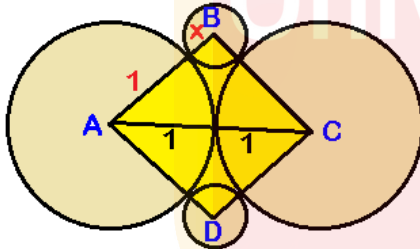
$$x^2 = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 = 9 + 25 - 3 \cdot 5 \cdot (-\sqrt{3})$$

$$x^2 = 34 + 15\sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{34 + 15\sqrt{3}} \quad (E)$$

30)



$$d = l\sqrt{2}$$

$$x + 1 = \sqrt{2}$$

$$2 = l\sqrt{2}$$

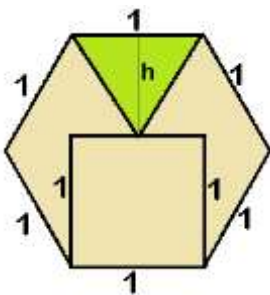
$$x = \sqrt{2} - 1 \quad (A)$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = l$$

$$l = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$l = \sqrt{2}$$

31)



Área do triângulo:

$$A_{\text{triâng}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

$$A_{\text{triâng}} = \frac{1 \cdot x}{2}$$

Altura do hexágono:

$$H_{\text{hexág}} = 2 \cdot x$$

$$H_{\text{hexág}} = 2 \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$H_{\text{hexág}} = l\sqrt{3} = 1\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{3} - 1$$

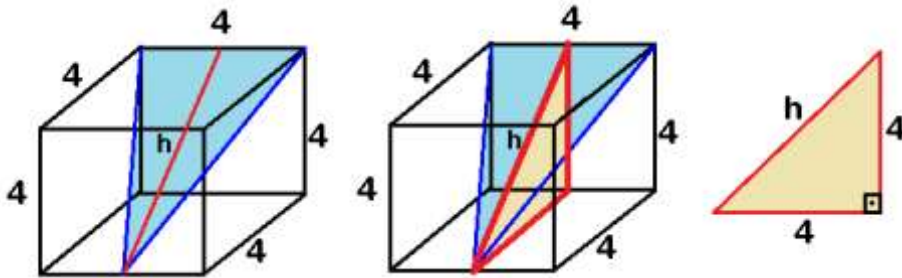
Área do triângulo:

$$A_{\text{triâng}} = \frac{1 \cdot x}{2}$$

$$A_{\text{triâng}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{3} - 1)}{2}$$

$$A_{\text{triâng}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \quad (B)$$

32)



$$h^2 = 4^2 + 4^2$$

$$h^2 = 32$$

$$h^2 = 2 \cdot 4^2$$

$$h = \sqrt{2 \cdot 4^2}$$

$$h = 4\sqrt{2}$$

(ou utilizar a diagonal quadrado)

Área do Triângulo:

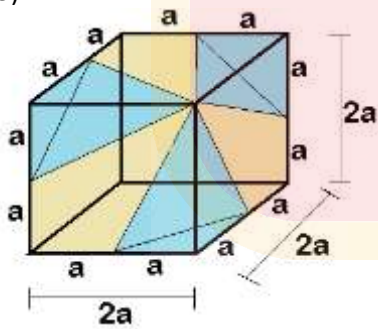
$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

$$A = \frac{4 \cdot 4\sqrt{2}}{2}$$

$$A = 8\sqrt{2} \quad (C)$$

Universitário

33)



$$\text{Razão} = \frac{V_{3\text{pirâmides}}}{V_{\text{cubo}}}$$

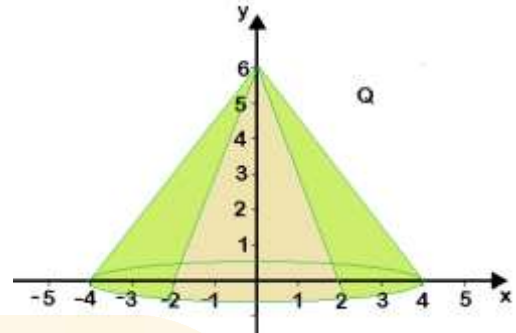
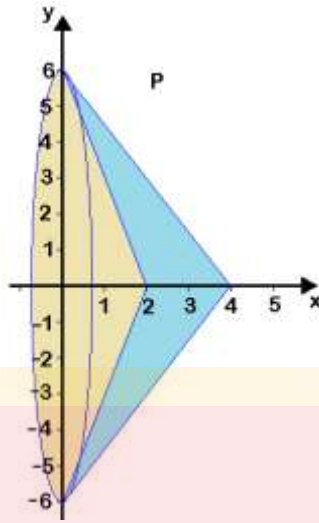
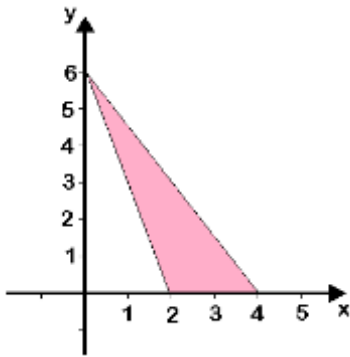
$$V_{\text{cubo}} = (2a)^3 = 8a^3$$

$$V_{1\text{pirâmide}} = \frac{A_{\text{base}} \cdot h}{3} = \frac{a \cdot a \cdot h}{3} = \frac{a^2 \cdot 2a}{3} = \frac{a^3}{3}$$

$$V_{3\text{pirâmides}} = 3 \cdot \frac{a^3}{3} = a^3$$

$$\text{Razão} = \frac{V_{3\text{pirâmides}}}{V_{\text{cubo}}} = \frac{a^3}{8a^3} = \frac{1}{8} \quad (A)$$

34)



V_P

$$V_{P_{maior}} = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 4}{3} = 48\pi$$

$$V_{P_{menor}} = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 2}{3} = 24\pi$$

$$V_P = V_{P_{maior}} - V_{P_{menor}} = 48\pi - 24\pi$$

$$V_P = 24\pi$$

V_Q

$$V_{Q_{maior}} = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 6}{3} = 32\pi$$

$$V_{Q_{menor}} = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 6}{3} = 8\pi$$

$$V_Q = V_{Q_{maior}} - V_{Q_{menor}} = 32\pi - 8\pi$$

$$V_Q = 24\pi$$

$$\text{Razão} = \frac{V_P}{V_Q}$$

$$\text{Razão} = \frac{24\pi}{24\pi} = 1 \quad (B)$$

35)

$$y > \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{3}{2}$$

$$x = 1 \text{ (corte no } x)$$

$$\text{corte no } y = -\frac{3}{2}$$

$$y > -\frac{2}{3}x + 5$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 5$$

$$-\frac{2}{3}x = -5$$

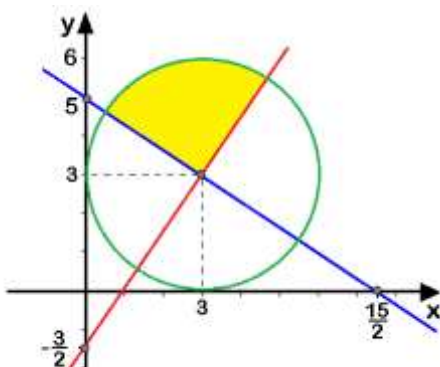
$$x = -\frac{15}{-2} = \frac{15}{2} \text{ (corte no } x)$$

$$\text{corte no } y = -\frac{3}{2}$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 < 9$$

$$\text{Centro: } C(3, 3)$$

$$\text{Raio: } r = 3$$



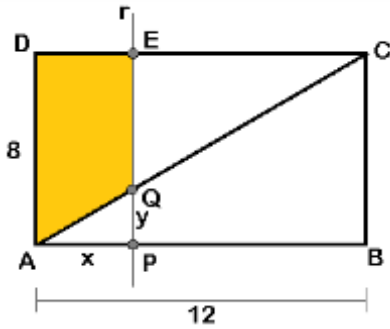
Os coeficientes angulares são $\frac{3}{2}$ e $-\frac{2}{3}$ (invertidos e com sinais opostos), então as retas são perpendiculares.

(ângulo de 90° entre elas). Isso faz com que a

área marcada seja $\frac{1}{4}$ da área do círculo:

$$A = \frac{\pi \cdot r^2}{4} = \frac{\pi \cdot 3^2}{4} = \frac{9\pi}{4} \quad (C)$$

36)



$$A_{APDE} = 8x$$

$$A_{\Delta APQ} = \frac{x \cdot y}{2}$$

Relação entre x e y

(semelhança de triângulos):

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{8}$$

$$8x = 12y$$

$$2x = 3y$$

$$y = \frac{2x}{3}$$

$$A_{\Delta APQ} = \frac{x \cdot \frac{2x}{3}}{2} = \frac{2x^2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2x^2}{6} = \frac{x^2}{3}$$

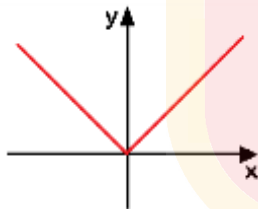
Função da área:

$$A(x) = 8x - \frac{x^2}{3} \quad (D)$$

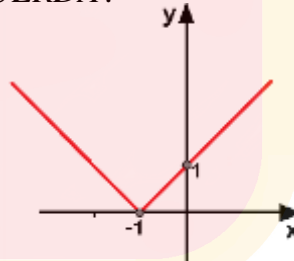
37)

$$f(x) = |x+1|$$

$f^*(x) = |x|$ tem o gráfico abaixo:

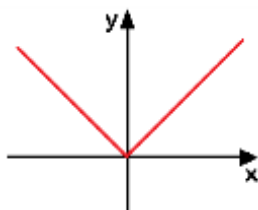


$f(x) = |x+1|$ "desloca" uma unidade para a ESQUERDA:



$$g(x) = -|x|-1$$

$g^*(x) = |x|$ tem o gráfico abaixo:



$$g(x) = -|x|-1$$

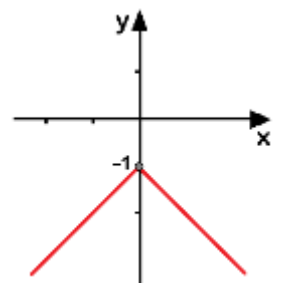
negativo antes do módulo:

inverte a concavidade

-1 fora do módulo:

"desloca" uma unidade para

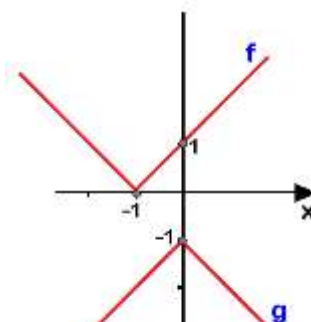
a BAIXO:



$f(x)$ e $g(x)$ no mesmo sistema cartesiano:

Observa-se que f está acima de g em toda a sua extensão, logo $f(x) > g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou ainda, para todo $x \in (-\infty, +\infty)$

(E)



38)

Meia-vida = 6 horas

Concentração inicial : $C_1 = 120 \text{ mg}$

Horário inicial : 10 horas

Meia-vida é o tempo necessário para a redução da massa pela metade.

Isso gera uma Progressão Geométrica de razão $q = \frac{1}{2}$ ou uma função

exponencial decrescente com a base da potência igual a $\frac{1}{2}$.

Elaborando a função, temos :

$C(x) = C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$, onde $C(x)$ é a concentração, C_1 é a concentração inicial e x representa o número de períodos. (cada período é igual a 6 horas)

O número de períodos pode ser obtido pelo processo intuitivo :



Substituindo-se :

$$C(x) = 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

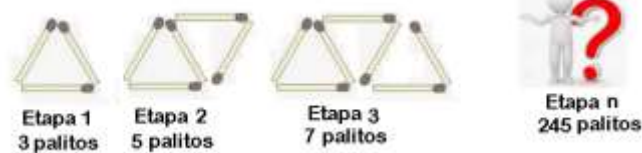
$$C(x) = 120 \cdot \left(\frac{1}{32}\right)$$

$$C(x) = \frac{120}{32}$$

$$C(x) = \frac{15}{4} = 3,75$$

$$C(x) = 3,75 \text{ mg} \quad (C)$$

39)



Pode-se perceber que trata-se de uma Progressão Aritmética de razão $r = 2$.
(aumento de 2 palitos a cada etapa)

Empregando-se a Fórmula do Termo Geral :

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

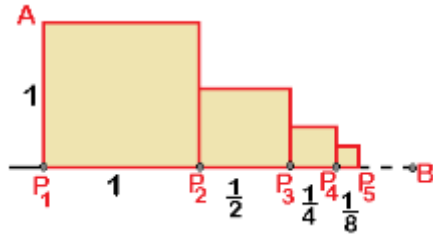
$$245 = 3 + (n-1) \cdot 2$$

$$245 - 3 = (n-1) \cdot 2$$

$$\frac{242}{2} = n-1$$

$$121 + 1 = n$$

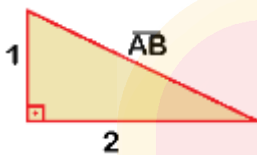
40)



A distância entre os pontos P_1 e B

resulta da soma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots$, ou seja, é igual ao limite da soma dos infinitos termos de uma PG.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo obtido:



$$\text{hip}^2 = \text{cat}_1^2 + \text{cat}_2^2$$

$$\overline{AB}^2 = 1^2 + 2^2$$

$$\overline{AB}^2 = 5$$

$$\overline{AB} = \sqrt{5} \quad (E)$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \quad q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$S_\infty = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \cdot 2 \quad S_\infty = 2 \quad \overline{P_1B} = 2$$

41)

Dados:

$$\log 2 = x$$

$$\log 3 = y$$

Determinar o valor de $\log 288$.

$$\log 288 = \log(2^5 \cdot 3^2)$$

$$= 5 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3$$

$$= 5x + 2y \quad (B)$$

$$\begin{array}{r|l} 288 & 2 \\ 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \hline & 2^5 \cdot 3^2 \end{array}$$

42)

$$f(x) = x^3$$

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ é o cubo da soma de 2 termos:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3. \text{Então:}$$

$g(x) = (x+1)^3$, que também pode ser escrita como

$g(x) = (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1)$. Nessa forma fatorada, de cada fator pode-se determinar uma raiz

estabelecendo igualdade a zero:

$$x+1=0$$

$$x=-1 \quad \text{raiz tripla igual a } -1:$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -1 \quad \text{e} \quad x_3 = -1$$

Gráfico:

Quando uma raiz tem multiplicidade ímpar, a curva intercepta o eixo x tangenciando-o no valor da raiz. Portanto, o gráfico correto está na alternativa (D)

43)

$$f(x) = \sqrt{2} \cdot \text{sen}(x) + \sqrt{2} \cdot \text{cos}(x)$$

Considerando:

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 2 \cdot \text{sen } 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 2 \cdot \text{cos } 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$f(x) = \sqrt{2} \cdot \text{sen}(x) + \sqrt{2} \cdot \text{cos}(x)$$

$$f(x) = 2 \cdot \text{sen } 45^\circ \cdot \text{sen } x + 2 \cdot \text{cos } 45^\circ \cdot \text{cos } x$$

$$f(x) = 2(\text{sen } 45^\circ \cdot \text{sen } x + \text{cos } 45^\circ \cdot \text{cos } x)$$

$$f(x) = 2(\text{cos } x \cdot \text{cos } 45^\circ + \text{sen } x \cdot \text{sen } 45^\circ)$$

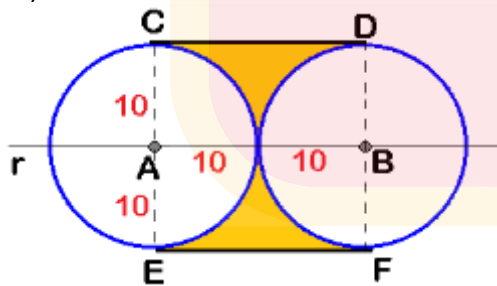
$$f(x) = 2 \cdot \text{cos}(x - 45^\circ)$$

O valor máximo pode ser obtido substituindo-se a expressão do cos por "1":

$$f(x) = 2 \cdot 1 = 2 \quad (B)$$

Para esse tipo de questão, quando a função é descrita em seno ou cos seno e solicita-se o valor máximo ou o valor mínimo, na prática, pode-se substituir a expressão em seno ou em cos seno por "-1" e por "1"; o menor valor obtido corresponde ao mínimo e o maior corresponde ao máximo.

44)



A área do quadrado central é dada por:

$$A_{\text{quadrado}} = \ell^2 = 20^2 = 400$$

A parte não sombreada desse quadrado corresponde a dois semicírculos, ou seja, é igual a um círculo inteiro.

$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$$

$$A_{\text{sombreada}} = 400 - 100\pi \quad (D)$$

Também poderia estar na forma:

$$A_{\text{sombreada}} = 100(4 - \pi)$$

45)

$$(x+1)^2 + y^2 = 4$$

Corte no eixo x: fazer $y = 0$

$$(x+1)^2 + 0^2 = 4$$

$$(x+1)^2 = 4$$

$$x+1 = \pm\sqrt{4}$$

$$x+1 = \pm 2$$

$$x+1 = -2 \quad x+1 = 2$$

$$x_1 = -3 \quad x_2 = 1$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 4$$

Corte no eixo y: fazer $x = 0$

$$(0+1)^2 + y^2 = 4$$

$$1^2 + y^2 = 4$$

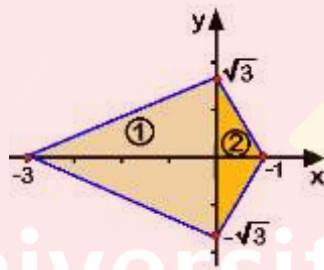
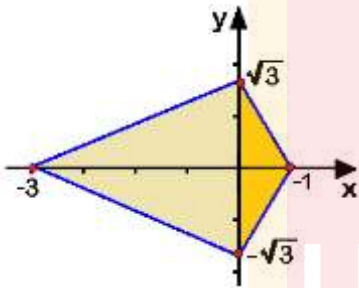
$$y^2 = 4 - 1$$

$$y^2 = 3$$

$$y = \pm\sqrt{3}$$

$$y_1 = -\sqrt{3} \quad y_2 = \sqrt{3}$$

A partir dessas informações obtém-se o esboço do gráfico:



$$A_1 = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_1 = \frac{2\sqrt{3} \times 1}{2} = \sqrt{3}$$

$$A_2 = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_2 = \frac{2\sqrt{3} \times 3}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$A_{\text{políg}} = \sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \quad (D)$$

46)

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ a + 2y = 9 \end{cases}$$

S.P.D.: Sistema Possível e Determinado

(Uma única solução)

Condição necessária:

determinante principal $\neq 0 \quad D \neq 0$:

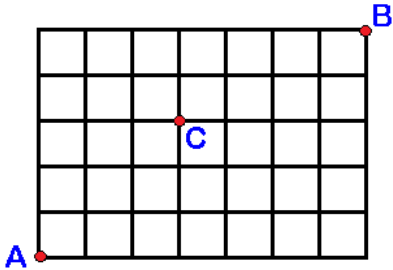
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$a \quad 2$$

$$2 - a \neq 0$$

$$2 \neq a \quad a \neq 2 \quad (E)$$

47)



Caminhos de A até C :

Subir 3 vezes e direita 3 vezes } total = 6

S S S D D D

$$P_n^{a,b,c} = \frac{n!}{a! b! c!}$$

$$P_6^{3,3} = \frac{6!}{3! 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! 3!}$$

$$P_6^{3,3} = 5 \cdot 4 = 20$$

Caminhos de C até B :

Subir 2 vezes e direita 4 vezes } total = 6

S S D D D D

$$P_n^{a,b,c} = \frac{n!}{a! b! c!}$$

$$P_6^{2,4} = \frac{6!}{2! 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2! 4!}$$

$$P_6^{2,4} = \frac{30}{2} = 15$$

Total de caminhos de A até B

(passando por C): aplicando o Princípio Fundamental da Contagem:

$$n = 20 \times 15 = 300 \quad (D)$$

48)

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

$$P(E) = \frac{f}{t}$$

Total de possibilidades para escolher quaisquer 6 números dentre 60:

(Como a ordem dos escolhidos não modifica a escolha feita, trata-se de combinações):

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_{60,6}$$

$$P(E) = \frac{f}{t} = \frac{C_{17,6}}{C_{60,6}} \quad (A)$$

Possibilidades favoráveis, ou seja, quando todos os 6 escolhidos são primos.

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Possibilidades favoráveis, ou seja, quando todos os 6 escolhidos são primos:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_{17,6}$$

49) Total de alunos = 30 (quantidade par)

Se a quantidade de elementos da distribuição é ÍMPAR: a mediana é o termo central (dados organizados em ordem crescente ou decrescente).

Regra Prática: Divide-se o total por 2 e pega-se o próximo inteiro. Por exemplo, com 31 elementos: $31 : 2 = 15,5$. A mediana é o 16º elemento

Se a quantidade de elementos da distribuição é PAR: a mediana é média aritmética dos dois termos centrais. (dados organizados em ordem crescente ou decrescente)

Regra Prática: Divide-se o total por 2 e pega-se o quociente e o próximo inteiro. Por exemplo, com 30 elementos: $30 : 2 = 15$. A mediana é a média entre o 15º e o 16º elemento.

Na tabela do exercício, os dados já estão em ordem crescente.

A mediana será a média entre o 15º e o 16º elemento.

15º elemento = nota 6 (15º = 5º + 10º)

16º elemento = nota 8 (é próximo valor na tabela)

$$md = \frac{6+8}{2} \quad md = 7,0 \quad (B)$$

Observe as 30 notas, como complemento resolutivo:

3 3 3 3 3 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 8 8 8 8 8 8 8 9,5 9,5 9,5 9,5 9,5 9,5 9,5 9,5

15º 16º

50)

I –
2019 → 30 30 ----- 100% $x = \frac{100 \cdot 10}{30} = 33,3\%$ (mais de 20%) (V)
2020 → 40 10 ----- x%

Diferença = 10

II –

2017 → menos de 15

2019 → 30

Se em 2017 fosse exatamente 15, em 2019 ter-se-ia o dobro que gera um aumento de 100%. Mas como em 2017, tem-se menos de 15, a porcentagem de aumento é superior aos 100% (V)

III –

2012 → 3

2016 → 12

Quadruplicou o valor de armazenamento. Significa um aumento de 300%.

2010 → 12 12 ----- 100% $x = \frac{18 \cdot 100}{12} = \frac{1800}{12} = 150\%$
2019 → 30 18 ----- x%

A diferença é 18

No período de 2012 a 2016 o crescimento percentual foi maior (V)

(E)